

Département des Sciences Economiques et Gestion

Filière : Sciences Economiques et Gestion

Semestre 2

Module: Mathématiques Financières

Pr. AIT CHEIKH

Année universitaire 2019 - 2020



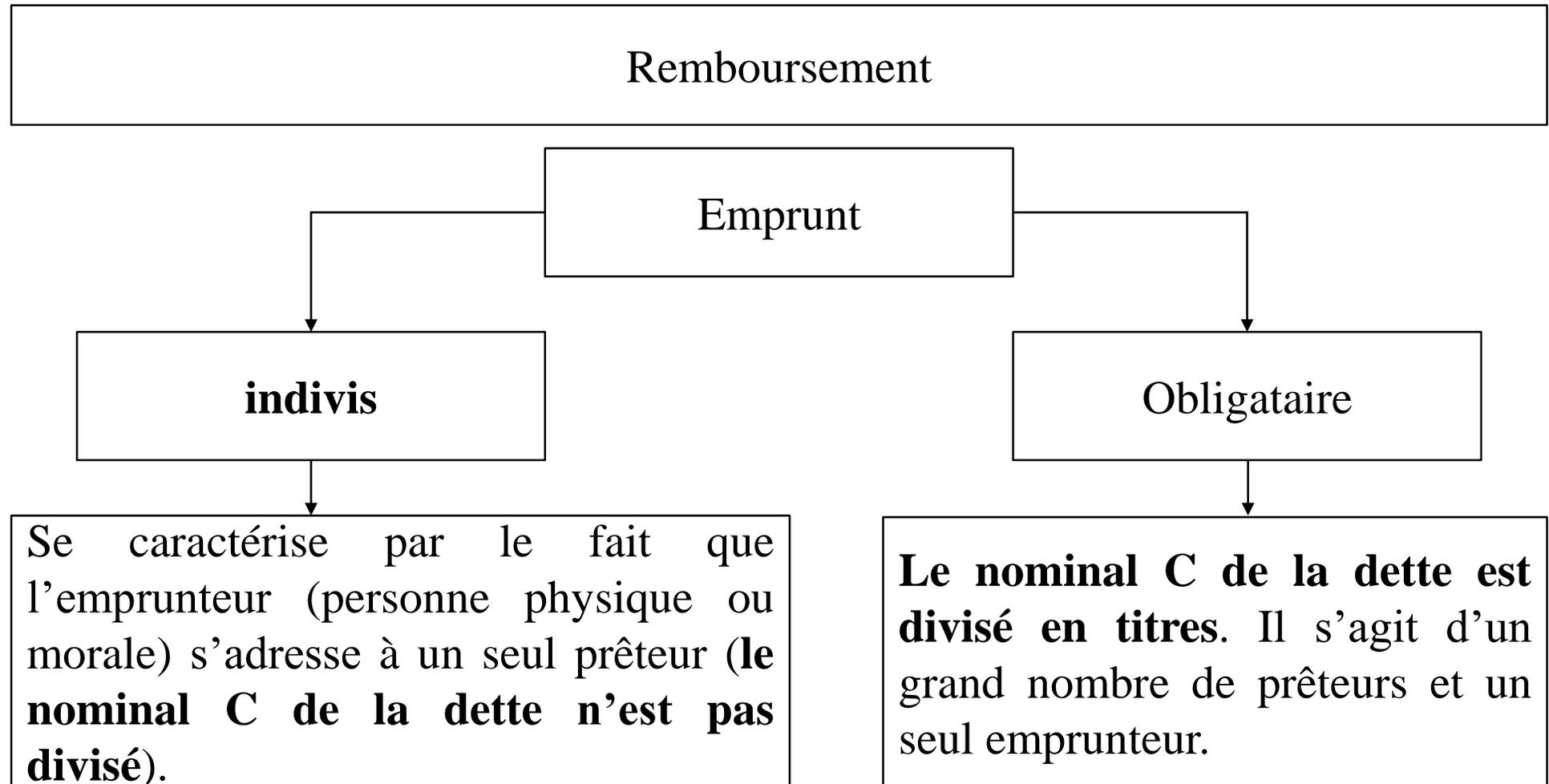
Chapitre 4 :

Emprunts indivis

- › Section 1: Définitions et principes de base
- › Section 2: Emprunts remboursables in fine
- › Section 3: Emprunts remboursables par amortissements constants
- › Section 4: Emprunts remboursables par annuités constantes
- › Section 5: Exercices d'application

- › Section 1: **Définitions et principes de base**
- › Section 2: Emprunts remboursables in fine
- › Section 3: Emprunts remboursables par amortissements constants
- › Section 4: Emprunts remboursables par Annuités constantes
- › Section 5: Exercices d'application

Définition



Définition

L'emprunteur du capital s'engage à s'acquitter de sa dette (capital et intérêt) de sorte que les sommes versées pour le remboursement soient équivalentes au **capital emprunté augmenté des intérêts dus**.

Le remboursement d'un emprunt est composé de **deux parties** :

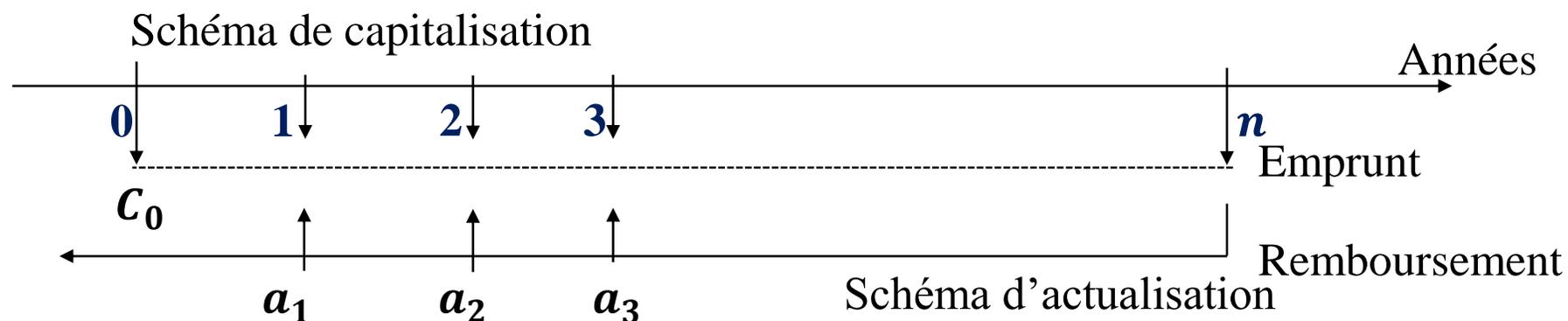
- **L'amortissement** qui est la somme destinée à rembourser au prêteur le **capital emprunté** ;
- **L'intérêt** qui est la somme destinée à **rémunérer** le prêteur pour le service de la dette.

L'emprunt indivis peut être remboursé de **deux façons** :

- **Par amortissements constants;**
- **Par annuités constantes.**

Principe général du fonctionnement d'un emprunt indivis

- Soit un capital C_0 prêté à la date $t = 0$.
- Ce capital est remboursé chaque année par des annuités $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$ pendant n années.
- i est le taux annuel de l'emprunt

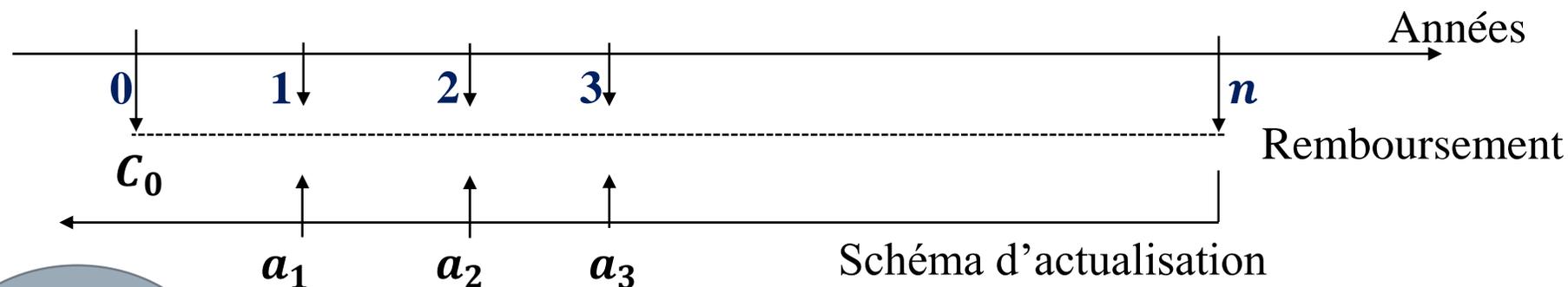


L'égalité : ***Emprunt = Remboursements*** se décline à la date $t = 0$

$$C_0 = \frac{a_1}{1+i} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + \frac{a_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{a_n}{(1+i)^n}$$

π

Principe général du fonctionnement d'un emprunt indivis



Valeur actuelle des annuités constantes de fin de période

$$C_0 = \frac{a_1}{1+i} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + \frac{a_3}{(1+i)^3} + \dots + \frac{a_n}{(1+i)^n}$$

$$C = a \times \frac{1 - (1+i)^{-n}}{i}$$

$$a = C \times \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$$

- La somme des annuités S est : $S = n \times a = n \times C \times \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}}$
- L'intérêt global : $I = S - C = n \times a - C = n \times C \times \frac{i}{1 - (1+i)^{-n}} - C$

Exemple

- Soit un emprunt $C_0 = 10\ 000\ dh$ prêté à la date $t = 0$.
- Ce capital est remboursé par un remboursement de $a_1 = 4000\ dh$ la première année, $a_2 = 3000\ dh$ la 2^{ème} année . Combien reste t-il à rembourser la 3^{ème} année ?
- Avec i est le taux annuel de l'emprunt $i = 10\%$

Solution:

$$C_0 = \frac{a_1}{1+i} + \frac{a_2}{(1+i)^2} + \frac{a_3}{(1+i)^3}$$

$$10\ 000 = \frac{4000}{1+0,1} + \frac{3000}{(1+0,1)^2} + \frac{a_3}{(1+0,1)^3}$$

$$10\ 000 - \frac{4000}{1+0,1} - \frac{3000}{(1+0,1)^2} = \frac{a_3}{(1+0,1)^3}$$

$$a_3 = 5170\ dh$$

Notion du coût de l'emprunt

- Est la valeur à payer par l'emprunteur en plus du remboursement du capital:

$$\text{Coût de l'emprunt} = a_1 + a_2 + \dots + a_n - C_0$$

Exemple

- Dans l'exemple précédent :

$$\text{Coût de l'emprunt} = 4000 + 3000 + 5170 - 10000$$

$$\text{Coût de l'emprunt} = 2170 \text{ dh}$$

Notion du tableau d'amortissement

Pour construire le tableau d'amortissement, il faut disposer des éléments suivants :

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
Date du remboursement	Est le capital restant à rembourser juste avant le remboursement à la date considérée	Sont ceux payés dans l'annuité de remboursements	Est la part de capital remboursé dans l'annuité de remboursement	

Notion du tableau d'amortissement

Pour construire le tableau d'amortissement, il faut disposer des éléments suivants :

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
	=CRD (a-1)- capital remboursé l'année (a-1)	= Taux d'emprunt * Capital restant		=Capital remboursé + Intérêts

Il est caractérisé par plusieurs éléments :

- Le montant de l'emprunt noté : C_0 (Capital nominal à la date $t = 0$)
- La durée de l'emprunt n
- Le taux d'intérêt i (Taux fixe)
- Le mode d'amortissement du capital

Modalités de remboursement de l'emprunt

▪ *Amortissement in fine* ou emprunt remboursable en une seule fois.

Modalités de Remboursement

▪ *Amortissements Constants*

▪ *Annuités Constantes*

- › Section 1: Définitions et principes de base
- › Section 2: **Emprunts remboursables in fine**
- › Section 3: Emprunts remboursables par amortissements constants
- › Section 4: Emprunts remboursables par Annuités constantes
- › Section 5: Exercices d'application

Définition

- Le remboursement du capital nominal (*principal*) C_0 s'effectue en une seule fois (en bloc): à la fin du contrat (la dernière années).
- Ici l'emprunteur ne verse à la fin de chaque année que l'intérêt I de la dette.

La situation se présente comme suit :



Tableau d'amortissement

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 \times i$	--- -	$a_1 = I_1$
2	C_0	$I_2 = C_0 \times i$	--- -	$a_2 = I_2$
p	C_0	$I_p = C_0 \times i$	--- -	$a_p = I_p$
$n - 1$	C_0	$I_{n-1} = C_0 \times i$	--- -	$a_{n-1} = I_{n-1}$
n	C_0	$I_n = C_0 \times i$	C_0	$a_n = I_n + C_0$

Exemple

- Un emprunt de 100 000 dh est remboursable à la fin de la 4^{ème} année, avec un taux de 10% par an.

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
	$C_0 = 100\ 000$	$I_1 = C_0 \times i$	---	$a_1 = I_1$
1	100 000	$100\ 000 \times 0,1$	0	10 000
2	100 000	10 000	0	10 000
3	100 000	10 000	0	10 000
4	100 000	10 000	100 000	$10\ 000 + 100\ 000$
				$= 110\ 000$

Coût de l'emprunt = $10\ 000 \times 4 = 40\ 000\ dh$

Coût de l'emprunt = $i \times C_0 \times n = 40\ 000\ dh$

π

Exemple

- Un emprunt de 250 000 dh est remboursable à la fin de la 10^{ème} année, avec un taux de 10,5% par an.

$$\begin{cases} C_0 = 250\,000 \\ i = 0,105 \\ n = 10 \\ I = 250\,000 \times 0,105 = 26\,250 \end{cases}$$

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	250 000	26 250	---	26 250
2	250 000	26 250	---	26 250
3	250 000	26 250	---	26 250
4	250 000	26 250	---	26 250
5	250 000	26 250	---	26 250
6	250 000	26 250	---	26 250
7	250 000	26 250	---	26 250
8	250 000	26 250	---	26 250
9	250 000	26 250	---	26 250
10	250 000	26 250	250 000	276 250

- › Section 1: Définitions et principes de base
- › Section 2: Emprunts remboursables in fine
- › Section 3: **Emprunts remboursables par amortissements constants**
- › Section 4: Emprunts remboursables par Annuités constantes
- › Section 5: Exercices d'application

› Section 3: Emprunts remboursables par amortissements constants

π

Définition

- Consiste à rembourser la même fraction de capital à chaque période (tous les ans).
- Ici les remboursements se font par amortissements constants ou encore par série égale.

La situation se présente comme suit :

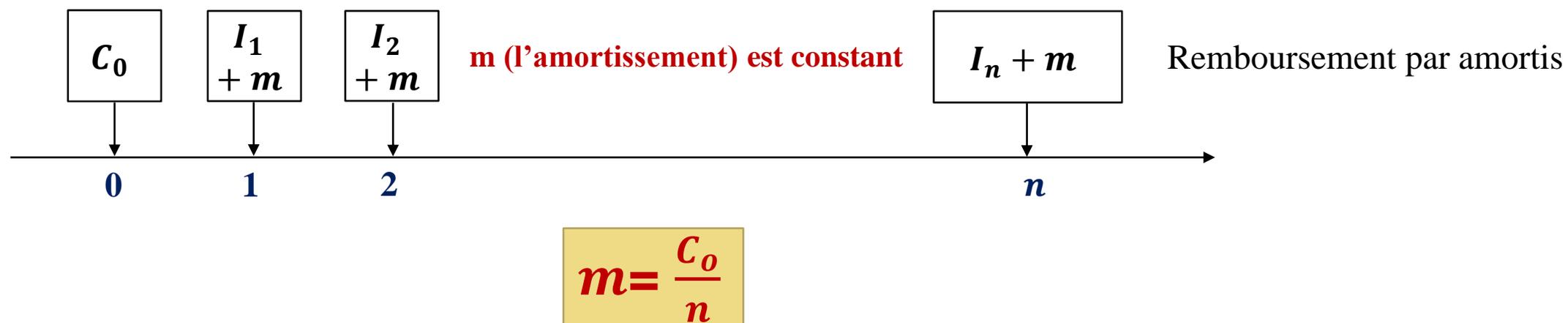


Tableau d'amortissement

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 \times i$	m	$a_1 = I_1 + m$
2	$C_1 = C_0 - m$	$I_2 = C_1 \times i$	m	$a_2 = I_2 + m$
...				
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m$	$I_p = C_{p-1} \times i$	m	$a_p = I_p + m$
...				
$n - 1$	$C_{n-1} = C_{n-2} - m$	$I_{n-1} = C_{n-2} \times i$	m	$a_{n-1} = I_{n-1} + m$
n	$C_n = C_{n-1} - m$	$I_n = C_{n-1} \times i$	m	$a_n = I_n + m$

$$m = \frac{C_0}{n}$$

Exemple

- Un emprunt de 100 000 dh est remboursable à la fin de la 4^{ème} année, avec un taux de 10% par an.

$$C_1 = C_0 - m$$

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
	C_0	$I_1 = C_0 \times i$	$m = \frac{C_0}{n}$	$a_1 = I_1 + m$
1	100 000	10 000	$m = \frac{100\ 000}{4} = 25\ 000$	$a_1 = 10\ 000 + 25\ 000 = 35\ 000$
2	$100\ 000 - 25\ 000 = 75\ 000$	7 500	$m = 25\ 000$	32 500
3	50 000	5 000	25 000	30 000
4	25 000	2 500	25 000	27 500

Coût de l'emprunt = 10 000 + 7 500 + 5 000 + 2 500 = 25 000 dh

Exemple

- Un emprunt de 100 000 dh est remboursable à la fin de la 5^{ème} année, avec un taux de 5% par an.

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	100000	5000	20000	25000
2	80000	4000	20000	24000
3	60000	3000	20000	23000
4	40000	2000	20000	22000
5	20000	1000	20000	21000

$$\text{Coût de l'emprunt} = 5\ 000 + 4\ 000 + 3\ 000 + 2\ 000 + 1\ 000 = 15\ 000\ dh$$

- › Section 1: Définitions et principes de base
- › Section 2: Emprunts remboursables in fine
- › Section 3: Emprunts remboursables par amortissements constants
- › Section 4: **Emprunts remboursables par annuités constantes**
- › Section 5: Exercices d'application

Définition

- Consiste à rembourser, pendant chaque période, la même annuité.
- Ici les remboursements se font par annuités constantes

La situation se présente comme suit :



Tableau d'amortissement

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	C_0	$I_1 = C_0 \times i$	m_1	$a = I_1 + m_1$
2	$C_1 = C_0 - m_1$	$I_2 = C_1 \times i$	m_2	$a = I_2 + m_2$
p	$C_{p-1} = C_{p-2} - m_{p-1}$	$I_p = C_{p-1} \times i$	m_p	$a = I_p + m_p$
$n - 1$	$C_{n-1} = C_{n-2} - m$	$I_{n-1} = C_{n-2} \times i$	m_{n-1}	$a = I_{n-1} + m_{n-1}$
n	$C_n = C_{n-1} - m$	$I_n = C_{n-1} \times i$	m_n	$a = I_n + m_n$

$$a = \frac{C_0 \times i}{1 - (1 + i)^{-n}} \text{ l'annuité est constante}$$

Exemple

- Un emprunt de 100 000 dh est remboursable à la fin de la 5^{ème} année, avec un taux de 10% par an.

$$a = \frac{C_0 \times i}{1 - (1+i)^{-n}} = \frac{100\,000 \times 0,10}{1 - (1+0,1)^{-5}} = 26379,7481$$

$$m_1 = a - I_1 = 26379,74808 - 10000$$

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	100000	10000	16379,74808	26379,74808
2	83620,25192	8362,02519	18017,72289	26379,74808
3	65602,52903	6560,2529	19819,49518	26379,74808
4	45783,03386	4578,30339	21801,44469	26379,74808
5	23981,58916	2398,15892	23981,58916	26379,74808

$$\text{Coût de l'emprunt} = 10\,000 + \dots + 2\,398,15892 = 31\,898,74\,dh$$

- › Section 1: Définitions et principes de base
- › Section 2: Emprunts remboursables in fine
- › Section 3: Emprunts remboursables par amortissements constants
- › Section 4: Emprunts remboursables par Annuités constantes
- › Section 5: **Exercices d'application**

Exercice 1

- Un entrepreneur désire réaliser un investissement de 800 000 dh. Pour financer le projet, il fait appel à un seul emprunt bancaire (emprunt indivis).
 - La banque lui propose trois modalités au taux annuel de 8%, pour une durée de 4 ans :
 - Première modalité: Remboursement in fine.
 - Deuxième modalité: Remboursement par amortissements constants.
 - Troisième modalité: Remboursement par annuités constantes.
- 1) Remplir les 3 tableaux en expliquant comment obtenir la première ligne de chaque tableau.
 - 2) Quelle modalité choisir si l'objectif de l'entrepreneur est de payer le moins d'intérêts possible ?

Exercice 1

Remplir les 3 tableaux en expliquant comment obtenir la première ligne de chaque tableau.

- Première modalité: Remboursement in fine.

Périodes	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	800000	64000	0	64000
2	800000	64000	0	64000
3	800000	64000	0	64000
4	800000	64000	800000	864000

Coût de l'emprunt = 256 000 dh

Exercice 1

Remplir les 3 tableaux en expliquant comment obtenir la première ligne de chaque tableau.

- Deuxième modalité: Remboursement par amortissements constants.

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	800000	64000	200000	264000
2	600000	48000	200000	248000
3	400000	32000	200000	232000
4	200000	16000	200000	216000

Coût de l'emprunt = 160 000 dh

Exercice 1

Remplir les 3 tableaux en expliquant comment obtenir la première ligne de chaque tableau.

- Troisième modalité: Remboursement par annuités constantes.

Date	Capital restant dû	Intérêt de la période	Amortissement	Annuités de fin de période
1	800 000	64000	177536,6436	241536,6436
2	622463,3564	49797,0685	191739,575	241536,6436
3	430723,7814	34457,9025	207078,7411	241536,6436
4	223645,0403	17891,6032	223645,0403	241536,6436

Coût de l'emprunt = 166 146,57 dh

Exercice 1

2) Quelle modalité choisir si l'objectif de l'entrepreneur est de payer le moins d'intérêts possible ?

- Première modalité: Remboursement in fine.

Coût de l'emprunt = 256 000 dh

- Deuxième modalité: Remboursement par amortissements constants.

Le plus faible coût 

Coût de l'emprunt = 160 000 dh

- Troisième modalité: Remboursement par annuités constantes.

Coût de l'emprunt = 166 146,57 dh